Investigations in the Foundation of Set Theory

Ernst Friedrich Ferdinand

Zermelo

"Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I"

Translated by Andreas Reif, Germany, 2015, V.0.5

With comments about translation options and the historical & mathematical contexts. Learning materials added.

In synoptical view, left hand side is the original text as published in 1908 in Germany, in the Mathematische Annalen, online available at:

http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0065&DMDID=DMDLOG_0018

Comments and explanations are written in the arial font. The formatting in the german source text is kept close to the original formatting. The english translation has more empty space to match the height of the longer german text. Remarks from me for translation options are written in square brackets [remark].

The original formatting is very confusing for the first time reader. Italic font is used for variables, but also for emphasizing words. Quotation marks are used to mark the beginning and ending of expressions, for indicating a certain meaning (to read it non-technical, that is as a word of everyday speach) or to quote himself.

Page numbers are written for exact quotation. After each page number the text of that page follows until the next page number appears.

Seite 261
Untersuchungen über die Grundlage der Mengenlehre. I.

Die Mengenlehre ist derjenige Zweig der Mathematik, dem die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Zahl, der Anordnung und der Funktion in ihrer ursprünglichen Einfachheit mathematisch zu untersuchen und damit die logischen Grundlagen der gesamten Arithmetik und Analysis zu entwickeln; sie bildet somit einen unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Wissenschaft.
...

Page 261
Investigations in the Foundation of Set Theory. I

"I." is actually the ordinal for 1, but there was never published a further part.

The set theory is the branch of mathematics which has the task to examine the basic notions of number, order and function in their original simplicity in a mathematical way and develop thereof the logical fondations for the entire arithmetics and analysis.
...

The word "ursprünglich"(original) emphasizes the literal meaning of original: Origin. The original simplicity refers to the tradition of finding basic elements going back to Platon, Euclid and others. Zermelo does not discuss the idea that axioms do form a temporal solution and their organisational function which is okay for a short article.

Seite 262
...

§1.
Grundlegende Definitionen und Axiome.

1. Die Mengenlehre hat zu tun mit einem *"Bereich"* B von Objekten, die wir einfach als *"Dinge"* bezeichnen wollen, unter denen die "Mengen" einen Teil bilden. Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$. Von einem Ding a sagen wir, es "existiere", wenn es dem Bereiche B angehört; ebenso sagen wir von einer Klasse K von Dingen, "es gebe Dinge der Klasse K", wenn B mindestens ein Individuum dieser Klasse enthält.

Page 262
...

§1.
Basic Definitions and Axioms.

1. The set theory is about a *"realm"* B of objects, which we call simply *"things"*, among those the "sets" are a part of. If two symbols a and b should name the same thing, we write $a = b$, in the opposite case $a \neq b$. Of a thing a we say, it "exists", if it belongs to the realm B; alike we say of a class K of things, "there are things of class K", if B contains at least one individual of this class.

The realm, sometimes translated as "domain" is a wider notion. Here is already the principle of bottom-up apporach visible: The things belong to a certain group (realm, class, set if they have a certain property.) Existence is enough to belong the the realm. If it has a thing, it is a class. What is needed to make a part a part of a set, it is a property which can be found without arbitraryness.

If a class has a thing and a set contains an element, what is the exact difference between those: The

<table>
<tr><td></td><td>belonging to a set is strictly regulated, while the belonging to a class does is not strict enough to apply the two-valued logic true/false.</td></tr>
<tr><td>2. Zwischen den Dingen des Bereichs B bestehen gewisse "Grundbeziehungen" der Form $a \varepsilon b$. Gilt für zwei Dinge a, b die Beziehung $a \varepsilon b$, so sagen wir, "a sei Element der Menge b" oder "b enthalte a als Element" oder "besitze das Element a". Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine Menge bezeichnet werden, aber auch nur dann – mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II).</td><td>2. Between the things of the realm B exists certain "basic relations" of the form $a \varepsilon b$. If for two things a, b the relation $a \varepsilon b$ is set, we say, "a is element of the set b" or "b contains a as element" or "owns the element a". A thing b, which contains another thing a as element, can always be named as set, and only if this is the case – with one exception(Axiom II).</td></tr>
<tr><td></td><td>The Axiom II is the empty set. It is the only exception to the rule that only containment does establish a set.
"Containment" has not to be read as "contains physically". This is a misleading, as in 1., a class also "contains" things, but has not necessarily be a set.</td></tr>
<tr><td>3. Ist jedes Element x einer Menge M gleichzeitig auch Element der Menge N, so sagen wir, "M sei Untermenge von N", und schreiben $M € N$*). Es ist stets $M € M$, und aus $M € N$ und $N € R$ folgt immer $M € R$.
"Elementenfremd"</td><td>3. Is every element x of a set M at the same time element of the set N, so we say, "M is a subset of N", and write $M € N$*). It is ever $M € M$, and by $M € N$ and $N € R$ results always $M € R$.
"Elements foreigns"</td></tr>
<tr><td></td><td>Foreign can also be translated as "alien", the modern english term is the disjoint set.</td></tr>
<tr><td>*) Dieses "Subsumptions"-Zeichen wurde von E.Schröder ("Vorlesungen über Algebra der Logik" Bd.I) eingeführt. Herr G.Peano und ihm folgend B.Russell, Whitehead u.a. brauchen dafür das Zeichen ɔ.</td><td>*) This "subsumptions"-sign was introduced by E.Schröder ("Lectures about the algebra of logic", Vol.I). Mister G.Peano and, following him, B.Russell, Whitehead and others use the sign ɔ.</td></tr>
<tr><td>P.263
heißen zwei Mengen M, N, wenn sie keine "gemeinsamen" Elemente besitzen, oder wenn kein Element von M gleichzeitig Element von N ist.</td><td>P.263
are called two sets M, N, if they have no "common" elements, or if no element of M is element of N at the same time.</td></tr>
<tr><td>4. Eine Frage oder Aussage 𝔈, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereichs vermöge der</td><td>4. A question or proposition 𝔈 [old german E], whose Validity or Invalidity are decided by the basic relations of the realm enabled by the</td></tr>
</table>

Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt *"definit"*. Ebenso wird auch eine "Klassenaussage" $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$, in welcher der variable Term $\mathfrak{x}$ alle Individuen einer Klasse $\mathfrak{K}$ durchlaufen kann, als "definit" bezeichnet, wenn sie für *jedes einzelne* Individuum $\mathfrak{x}$ der Klasse $\mathfrak{K}$ definit ist. So ist die Frage, ob $a \varepsilon b$ oder nicht ist, immer definit, ebenso die Frage, ob *M* € *N* oder nicht.	axioms and the general [allgemeingültigen] logical relations without arbitrariness, is called *"defnite"*. Alike is named a "class proposition" $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$ [in modern font:E(x)], in which the variable term $\mathfrak{x}$ can run through all individuals of a class $\mathfrak{K}$ [modern font: K] as "definite", if it is definite for *each single* individual $\mathfrak{x}$ of the class $\mathfrak{K}$. Therefore the question if $a \varepsilon b$ or not is always definite, also the question if *M* € *N* or not.
Über die Grundbeziehungen unseres Bereichs $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden "Axiome" oder "Postulate": **Axiom I**. Ist jedes Element einer Menge *M* gleichzeitig Element von *N* und umgekehrt, ist also gleichzeitig *M* € *N* und *N* € *M,* so ist immer *M=N* . Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt. (Axiom der Bestimmheit)	So about the basic relations of our realm $\mathfrak{B}$ [modern font: B] the following "axioms" or "postulates"apply: **Axiom I**. If any element of a set *M* is also element of *N* at the same time and vice versa, that is *M* € *N* is *N* € *M* at the same time, therefore is always *M=N*. (Axiom of Definiteness)
Die Menge, welche nur die Elemente *a, b, c, ..., r* enthält, wird zur Abkürzung vielfach mit *{a, b, c, ..., r}* bezeichnet werden.	The set which contains the elements *a, b, c, ..., r*, is by abbreviation named as *{a, b, c, ..., r}*.
Axiom II. Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die *"Nullmenge"* 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist *a* irgend ein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge {*a*}, welche *a* und nur *a* als Element enthält; sind *a, b* irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge {*a, b*}, welche sowohl *a* und *b*, aber kein von beiden verschiedenes Ding *x* enthält. (Axiom der Elementarmengen)	**Axiom II.** There is an (improper) set, the "null set" 0, which has no elements at all. Is *a* any one thing of the realm, therefore exists a set {*a*}, which contains *a* and only *a* as element; are *a, b* any two things of the realm, there exists always a set {*a, b*}, which contains *a* and b, but no from both different thing *x*. (Axiom of the Elementary Sets)
	Misleading for the first time reader is the clause " *...any two things ...which contains a and b, but no from both different thing x"* Shouldn't it be: ... which contains a and b, but *not a third thing x?* It would be far more comprehensible. But it has a reason to use "different from both" instead of third: Counting is starting with number, while 2 can be encoded with "a pair" or both. So there is a gap in the mathematical world between a thing different from 2 and a labeling called "3". So Zermelo can't use 3 because the induction which gives the ground to do so is not yet defined at this point.
5. Nach I sind die "Elementarmengen" {*a*}, {*a, b*} immer eindeutig bestimmt, und es gibt immer nur eine einzige "Nullmenge". Die Frage, ob *a=b* oder nicht, ist immer definit (Nr.4), da sie mit der Frage, ob $a \varepsilon \{b\}$ ist, gleichbedeutend	5. By I are the "elementary sets" {*a*}, {*a, b*} always defined unambiguously, and there is always just one "null set". The question if *a=b* or not is always definite (No.4), as it has the same meaning as $a \varepsilon \{b\}$.

ist.	
6. Die Nullmenge ist Untermenge jeder Menge *M*, 0 € M; eine gleichzeitig von 0 und *M* verschiedene Untermenge von *M* wird als *"Teil"* von *M* bezeichnet. Die Mengen 0 und $\{a\}$ besitzen keine Teile.	6. The null set is sub set of every set *M*, 0 € M; a set at the same time different from 0 and *M* is named *"part"* of *M*. The sets 0 and $\{a\}$ do not contain parts.
Axiom III. Ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge *M*, so besitzt *M* immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente *x* von *M*, für welche $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist, und nur solche Elemente enthält. (Axiom der Aussonderung) Indem das vorstehende Axiom III in weitem Umfange die Definition neues Mengen gestattet, bildet es einen gewissene Ersatz für die in der Einleitung angeführte und als unhaltbar aufgegebene Mengendefinition, von der es sich durch die folgende Einschränkung unterscheidet:	**Axiom III.** Is the class proposition $\mathfrak{E}(x)$ [in modern font:E(x)] definite for all elements of a set *M*, therfore *M* contains always a subset $M_{\mathfrak{E}}$, which contains all elements *x* of *M*, for which $\mathfrak{E}(x)$ is true, and only such elements. (Axiom of Segregation) By allowing new set definitions at a wide range, the preceding Axiom III is a certain replacement for the untenable set definition given at the introduction, form which it is different by the following constraint:
Erstens dürfen mit Hilfe dieses Axioms niemals Mengen *independent definiert*, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen ausgesondert werden,	First it is not allowed to *independently define* sets, but always as sub sets from already given sets,
wodurch widerspruchsvolle Gebilde wie "die Menge aller Mengen" oder die Menge aller Ordinalzahlen" und nach dem Ausdrucke des Herrn G. Hessenberge ("Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIV) die "ultrafiniten Paradoxien" ausgeschlossen sind. Zugleich muß zweitens das bestimmende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ im Sinne unserere Erklärung Nr.4 immer "definit" d.h. für jedes einzelne Element *x* von *M* durch die "Grundbeziehungen des Bereiches" entschieden sein, und hiermit kommen alle solchen Kriterien wie "durch eine endliche Anzahl von Worten definierbar" und damit die "Antinomie Richard" oder die "Paradoxie der endlichen Bezeichnung" (Hessenberg a.a.O. XXIII, vergl. dagegen J. König, Math. Ann. Bd. 61, p. 156) für unseren Standpunkt in Wegfall.	by which contradictory fabrics like "the set of all sets" or the set of all ordinal numbers" and after the expression of mister G. Hessenberge (Basic notions of set theory" XXIV) the "ultrafinite paradoxes" are excluded. Simultanously has to be secondly the defining crietria $\mathfrak{E}(x)$ in the sense of our explanation Nr.4 be always "definite", that is for each single element *x* of *M* by the "basic relations of the realm" be decided, and by that all such critery like "being definable by a finite amount of words" and Richard's Antinomy or the "paradox of finite declaration" (Hessen at the mentioned source XXIII, compare objection of J. König, Math. Ann. Bd. 61, p.156) of our point of view are getting disposed.
Hieraus folgt aber auch, daß, streng genommen, vor jeder Anwendung unseres Axioms III immer erst das betreffende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ als "definit" nachgewiesen werden muß, was denn auch in den folgenden Entwicklungen bei jeder Gelegenheit, wo es nicht ganz selbstverständlich ist, immer geschehen soll.	By that follows also, that, strictly taken, before each appliance of our Axiom III first the concerning criteria $\mathfrak{E}(x)$ has to be proved as "definite", which has to be done always at every occasionin the following developings, where it is not a matter of course.

7. Ist $M1$ € M, so besitzt M immer eine weitere Untermenge $M - M_1$, die *"Komplementärmenge von M_1"*, welche alle diejenigen Elemente von M umfaßt, die *nicht* Elemente von M_1 sind. Die Komplementärmenge von M-M_1 ist wieder M_1. Die Komplementärmenge von $M_1 = M$ ist die Nullmenge 0, die Komplementärmenge jedes *"Teiles"* M_1 von M (Nr.6) ist wieder ein "Teil" von M.

8. Sind M, N irgend zwei Mengen, so bilden nach III diejenigen Elemente einer Untermenge D von M, welche auch Untermenge von N ist und alle M und N *gemeinsamen* Elemente umfaßt. Diese Menge D wird der "gemeinsame Bestandteil" oder der *"Durchschnitt"* der Mengen M und N genannt und mit [M, N] bezeichnet. Ist M € N, so ist [M, N] = M; ist $N = 0$ oder sind M und N "elementfremd" (Nr. 3), so ist [M, N] =0.

9. Ebenso existiert auch für mehrere Mengen $M, N, R, \ldots$ immer ein "Durchschnitt" $D = [M, N, R \ldots]$.

...

Seite 265

Axiom IV. Jeder Menge T entspricht eine zweite Menge $\mathfrak{U}\,T$ (die *"Potenzmenge"* von T), welche alle Untermengen von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Potenzmenge.)

Axiom V. Jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}\,T$ (die *"Vereinigungsmenge"* von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Vereinigung.)

11. Ist kein Element von T eine von 0 verschiedene Menge, so ist natürlich $\mathfrak{S}\,T = 0$. Ist $T = \{ M, N, R, \ldots\}$, wo die $M, N, R, \ldots$ sämtlich Mengen sind, so schreibt man auch $\mathfrak{S}\,T = M + N + R + \ldots$ und nennt $\mathfrak{S}\,T$ die "*Summe* der Mengen $M, N, R, \ldots$", ob nun einige dieser Mengen $M, N, R, \ldots$ nun gemeinsame Elemente

7. Is $M1$ € M, so M always has a further subset M -M_1, the *"complementary set of M_1"*, which comprises all those elements of M, which are *not* element of M_1. This complementary set of M -M_1 is again M_1.
The complementary set of $M_1 = M$ is the zero set 0, the complementary set of each *"part" M_1 of M* (Nr.6) is again a "part" of M.

8. Are M, N any two sets, so according to III those elements are creating a subset D of M, whcih is also subset of N and comprises all elements *common* to M und N. This set D is called the "common component" or the *"average"* of the sets M and N and is labeled as [M, N].
Is M € N, therefore is [M, N] = M; is $N = 0$ or are M and N "disjoint" (No.3), therefore is [M, N]=0.

9. Alike there exists always an "average" $D = [M, N, R \ldots]$ for multiple sets $M, N, R, \ldots$.

...

Page 265

Axiom IV. Every set T corresponds to a second set $\mathfrak{U}\,T$ (the *"power set"* of T), which contains all subsets of T and only those as elements. [$\mathfrak{U}$ is old german for U]

(Axiom of Powerset.)

Axiom V. Every set T corresponds to a set $\mathfrak{S}\,T$ (the *"union set"* of T), which contains all elements of the elements of T and only those elements. [$\mathfrak{S}$ is old german for S]

(Axiom der Union.)

11. Is no element of T a set different from 0, therefore is certainly $\mathfrak{S}\,T = 0$. Is $T = \{ M, N, R, \ldots\}$, where the $M, N, R, \ldots$ all are sets, therefore one writes also $\mathfrak{S}\,T = M + N + R + \ldots$ and calls $\mathfrak{S}\,T$ the "sum of the sets $M, N, R, \ldots$", wether some of these sets $M, N, R, \ldots$ have common elements or not. It is always $M = M + 0 = M +$

besitzen oder nicht. Es ist immer $M = M + 0 = M + M = M + M + \ldots$.	$M = M + M + \ldots$.
12. Für die soeben definierte "Addition" der Mengen gilt das "kommutative" und das "assoziative" Gesetz: $M + N = N + M, M + (N + R) = (M + N) + R)$	12. For the just defined "addition" of sets the commutatice and the associative law holds: $M + N = N + M, M + (N + R) = (M + N) + R)$
Endlich gilt für "Summen" und "Durchschnitte" (Nr.8) auch das "distributive" Gesetz in doppelter Form: [M + N, R] = [M,R] + [N, R], [M, N + R] = [M + R, N + R].	Finally also for "Sums" and "Averages" (Nr.8) the "distributive" law holds in doubled form: [M + N, R] = [M,R] + [N, R], [M, N + R] = [M + R, N + R].
Den Beweis ...	The Proof ...
13. Einführung des Produktes. Ist M eine von 0 verschiedene Menge und a irgend eines ihrer Elemente, ... Es sei nun ... Um nun den Satz zu gewinnen, daß *ein Produkt mehrerer Mengen nur dann verschwinden* (d.h. der Nullmenge gleich sein) *kann, wenn ein Faktor verschwindet*, brauchen wir ein weiteres Axiom.	13. Introduction of the product. Is M a set different from 0 and a one of its elements, ... It be that ... To gain the theorem, that *a product of several sets only vanishes* (that is to be equal to the zero set), *if one factor vanishes*, we need a further axiom.
Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S} T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Element von T ein und nur ein Element gemein hat. (Axiom der Auswahl)	**Axiom VI**. Is T a set, which all elements are sets different from 0 and disjoint from each other, so their union $\mathfrak{S} T$ contains at least a subset S_1, which has one and only one thing in common with each element of T. *(Axiom of Choice)*
Man kann dieses Axiom auch so ausdrücken, daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente $M, N, R, \ldots$ von T ein einzelnes Element $n, m, r, \ldots$ *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1, zu vereinigen.*) ...	One can express this axiom also like saying that it is always possible to *choose* one single element $n, m, r, \ldots$ from each element $M, N, R, \ldots$ of T and unify these elements to one set S_1. *)
Axiom VII. Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, daß jedem ihrer Elemente a ein weiteres Element der Form $\{a\}$ entspricht, oder welche mit jedem	**Axiom VII.** The realm contains at least one set Z, which has the zero set as element and is of a consistence, so that each of its elemens a corresponds to a further element of the form $\{a\}$, or which contains with each
*) Über die Berechtigung dieses Axioms vgl. meine Abhandlung Math. Ann. Bd. 65, p.107-128, wo im § 2 p.111 ff. die bezügliche Literatur	*) About the justification of this axiom see my work Math. Ann. Bd. 65, p.107-128, where in §

erörtert wird. S. 267	2 p.111 ff. the corresponding literature is mentioned P. 267
ihrer Elemente a auch die entsprechende Menge $\{a\}$ als Element enthält. (Axiom des Unendlichen)	of its elements a also the corresponding set $\{a\}$ as element. (Axiom of infinity)
$14_{VII.}$ *) Ist Z eine beliebige Menge von der in VII geforderten Beschaffenheit, so ist für jede ihrer Untermengen Z_1 definit, ob sie die gleiche Eigenschaft besitzt. Denn ist a irgend ein Element von Z_1, so ist definit, ob auch $\{a\}$ ε Z_1 ist, und alle so beschaffenen Elemente a von Z_1 bilden die Elemente einer Untermenge Z_1', für welche definit ist, ob $Z_1 = Z_1'$ ist oder nicht. Somit bilden alle Untermengen Z_1 von der betrachteten Eigenschaft die Elemente einer Untermenge T € $\mathfrak{U} Z$, und der ihnen entsprechende Durchschnitt (Nr. 9) $Z_0 = \mathfrak{D} T$ ist eine Menge von der gleichen Beschaffenheit. Denn einmal ist 0 gemeinsames Element aller Elemente Z_1 von T, und andererseits, wenn a gemeinsames Element aller dieser Z_1 ist, so ist auch $\{a\}$ allen gemeinsam und somit gleichfalls Element von Z_0.	$14_{VII.}$ *) Is Z any set of the consistency demanded by VII, therefore it is definite for each of its subsets Z_1, if it has the same property. Because if a is any element of Z_1, it is definite, if $\{a\}$ is ε Z_1, and all such elements a of Z_1 are the elements of an subset Z_1', for which it is definite, if $Z_1 = Z_1'$ is or not. Therefore all subsets of Z_1 of the concerned property build the elements of a subset T € $\mathfrak{U} Z$, and the corresponding average (Nr. 9) $Z_0 = \mathfrak{D} T$ is a set of the same consistency. Because first is 0 a common element of all elements Z_1 of T, and further, if a is a common element of all of these Z_1, then is also $\{a\}$ common to all and therefore also element of Z_0.
Ist nun Z' irgend eine andere Menge von der im Axiom geforderten Beschaffenheit, so entspricht ihr in genau derselben Weise wie Z_0 dem Z eine kleinste Untermenge Z_0' von der betrachteten Eigenschaft. Nun muß aber auch der Durchschnitt $[Z_0, Z_1']$, welcher eine gemeinsame Untermenge von Z und Z' haben und als Untermenge von Z den Bestandteil Z_0, sowie als Untermenge von Z' den Bestandteil Z_1' enthalten. Nach I folgt also, daß $[Z_0, Z_1'] = Z_0 = Z_0'$ sein muß, und daß somit Z_0 *der gemeinsame Bestandteil aller möglichen wie Z beschaffenen Mengen ist*, obwohl diese nicht die Elemente einer Menge zu bilden brauchen. Die Menge Z_0 enthält die Elemente 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ usw. und möge als *"Zahlenreihe"* bezeichnet werden, weil ihre Elemente die Stelle der Zahlzeichen vertreten können. Sie bildet das einfachste Beispiel einer "abzählbar unendlichen" Menge (Nr. 36).	Is now Z' any other set of a consistency demanded in the axiom, so it correspondends in the same manner as Z_0 to Z, to a smallest subset Z_0' of the concerned property. Now the average $[Z_0, Z_1']$, which has to have a common subset of Z and Z' and as subset of Z the part Z_0, and as subset of Z' the part Z_1'. From I derives therefore, that it has to be $[Z_0, Z_1'] = Z_0 = Z_0'$, and that Z_0 *is the common part of all possible sets which are made like Z,* nevertheless these elements do not have to build a set. The set Z_0 contains the elements 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ and so on and may named as *"number sequence"*, because its elements can represent the positions of the number signs. They are the most simple example of a "countable infinite" set (No. 36).
§2. Theorie der Äquivalenz. Die "Äquivalenz" zweier Mengen **) ...	§2. Theory of Equivalence The "equivalence" of two sets **) ...